

Везде p — нечетное простое число.

Задача 3.1. а) Вычислите $\cos(2\pi/5)$; б) если $p = 5k + 1$, то $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$.

Задача 3.2. а) Если $p = 8k + 1$, то $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$. б) Если $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{-2}{p}\right) = 1$, то $p = 8k + 1$.

На самом деле, $\left(\frac{2}{p}\right) = 1 \iff p = 8k \pm 1$ и $\left(\frac{5}{p}\right) = 1 \iff p = 5k \pm 1$.

Задача 3.3. а) Если $\left(\frac{-2}{p}\right) = 1$, то p представимо в виде $a^2 + 2b^2$.

(УКАЗАНИЕ. Воспользуйтесь леммой Туэ.)

б) Приведите пример такого (простого) p , что $\left(\frac{-27}{p}\right) = 1$, но p не представимо в виде $a^2 + 27b^2$.

На самом деле, если $\left(\frac{-27}{p}\right) = 1$, то $4p$ всегда представимо в виде $a^2 + 27b^2$, а p — только если кроме того 2 является *кубическим* вычетом по модулю p (это тоже доказал Гаусс).