Школа 57
летний лагерь
Ершово

июнь 2014

Симметрические многочлены – 1

Напомним, что $s_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^i + x_2^i + \ldots + x_n^i$.

Задача 1. Докажите, что любой симметрический многочлен от $x_1, \ldots, x_n$ выражается как многочлен от $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Задача 2. a) Какое максимальное число различных коэффициентов может иметь однородный симметрический многочлен от x, y, z степени 4? Нарисуйте соответствующие диаграммы Юнга.

b) Выразите все однородные симметрические многочлены от x, y, z степени 4 через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$.

c^*) То же через s_1, s_2, s_3, s_4.

Конечно, для этого достаточно выразить все “простейшие” многочлены типа $x^3y + xy^3 + x^3z + xz^3 + y^3z + yz^3$.

Задача 3. a) Выведите рекуррентное соотношение, выражающее $s_n(x, y)$ через $s_{n-1}(x, y)$, $s_{n-2}(x, y)$ и $\sigma_1(x, y)$, $\sigma_2(x, y)$.

b) Вычислите с его помощью $s_i(x, y)$ при $i \leqslant 6$.

Задача 4. Найдите сумму квадратов и сумму кубов корней следующих многочленов:

a) $t^3 - 5t + 1$;

b) $t^3 + t^2 - 7t + 3$.