Прямая и окружность Эйлера

Задача 1. Пусть M_a, M_b, M_c — середины сторон, H_a, H_b, H_c — основания высот треугольника ABC площади S. Докажите, что из отрезков M_aH_b, M_bH_c, M_cH_a можно составить треугольник, и найдите его площадь.

Задача 2. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а O_1, O_2 и O_3 — точки, симметричные точке O относительно прямых AB, BC и AC. Докажите, что середины сторон треугольника $O_1O_2O_3$ лежат на окружности девяти точек треугольника ABC.

Задача 3. Найдите геометрическое место точек пересечения высот треугольников, вписанных в данную окружность.

Задача 4. Докажите, что отрезок, высекаемый на стороне AB остроугольного треугольника ABC окружностью девяти точек, виден из её центра под углом $2|\angle A - \angle B|$.

Задача 5. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, если на плоскости отмечены три точки: O — центр его описанной окружности, P — точка пересечения медиан и H — основание одной из высот этого треугольника.

Задача 6. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников ABC, HBC, AHC и ABH образуют четырёхугольник, симметричный четырёхугольнику $HABC$.

Задача 7. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H; точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков AH, BH и CH соответственно. Рассмотрим шестиугольник, образованный пересечением треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Докажите, что его диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

Задача 8. Даны остроугольный треугольник ABC и точка P, не совпадающая с точкой пересечения его высот. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников PAB, PAC, PBC и ABC, а также окружность, проходящая через проекции точки P на стороны треугольника ABC, пересекаются в одной точке.