

## Уравнения пятой степени

**Задача 1.** Докажите что если кубическое уравнение с действительными коэффициентами  $x^3 + px + q = 0$  имеет двойной, но не тройной корень, то формула Кардано дает другой (не двойной) корень, и он равен  $\sqrt[3]{-4q}$ .

**Задача 2. а)** Функция  $\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}$  называется *гиперболическим синусом*. Докажите для нее формулу

$$\operatorname{sh} 3\alpha = 3 \operatorname{sh} \alpha + 4 \operatorname{sh}^3 \alpha.$$

**б)** Воспользуйтесь этой формулой так же, как в предыдущей задаче, и найдите гиперболически-тригонометрическую формулу для решения уравнения  $x^3 + px + q = 0$  с действительными коэффициентами. Когда она работает? Сколько решений дает?

**Задача 3.** Докажите, что всякую перестановку из  $S_n$  можно представить в виде произведения нескольких перестановок, равных  $(1\ 2)$  или  $(1\ 2 \dots n)$ .

**Задача 4.** Докажите, что всякая четная перестановка из  $S_n$  может быть представлена в виде произведения перестановок  $(1\ 2\ 3)$ ,  $(1\ 2\ 4)$ ,  $\dots$ ,  $(1\ 2\ n)$ .

**Задача 5.** Докажите, что всякая четная перестановка из  $S_n$  при  $n \geq 5$  представима в виде произведения коммутаторов четных перестановок.

**Задача 6 (Kleinsche Vierergruppe).** Докажите, что существует ровно четыре перестановки  $(i_1, i_2, i_3, i_4)$  элементов множества  $\{1, 2, 3, 4\}$ , которые могут быть представлены в виде произведения коммутаторов четных перестановок (на самом деле они являются коммутаторами четных перестановок). Докажите это и найдите эти четыре перестановки.

**Задача 7.** Рассмотрим кубическое уравнение

$$x^3 + ax - 1 = 0.$$

При  $a = 0$  у этого уравнения три корня: 1 и  $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ .

- а)** При каких значениях  $a$  у этого уравнения есть двойные корни (то есть чему равны «опасные значения»  $a$ )?
- б)** Одно из этих опасных значений  $a$  действительно (и отрицательно). Если  $a$  обходит петлю вокруг этого опасного значения, начинающуюся в точке 0, то какая перестановка корней образуется в результате?
- в)** Покажите, что любая перестановка корней может быть получена из петли, начинающейся в точке  $a = 0$ , не проходящей через опасные значения  $a$  и возвращающейся в 0.