Школа 57
летний лагерь
Ершово

Мера Лебега на плоскости

июнь 2014

Пусть дана последовательность a_n. *Суммой ряда* $\sum a_n$ называется предел последовательности $s_n = a_1 + \ldots + a_n$. Ряд называется *сходящимся*, если эта сумма существует и конечна.

Задача 1. a) Докажите, что сходимость и сумма ряда с неотрицательными членами не зависит от порядка его членов.

b) Приведите пример, показывающий, что для произвольного ряда это не обязательно так.

Прямоугольником будем называть прямое произведение двух ограниченных промежутков.
Мерой прямоугольника назовём произведение длин его сторон.
Элементарным множеством называется подмножество плоскости, представимое в виде конечного объединения непересекающихся прямоугольников.

Задача 2. Покажите, что a) пересечение, b) объединение, c) разность двух элементарных множеств – элементарное множество.

Задача 3. Пусть $M = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_m$ – два представления элементарного множества M в виде объединения непересекающихся прямоугольников. Докажите, что $\sum \mu(A_i) = \sum \mu(B_j)$.

Конечно, при этом нельзя пользоваться свойствами площади, а нужно использовать только определение меры прямоугольника.

Задача 4. Пусть $A \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ – покрытие элементарного множества A счётным объединением непересекающихся элементарных множеств. Докажите, что

$$\mu(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Подсказка: используйте определение компакта.

Задача 5. Пусть множество A измеримо по Жордану.

a) Покажите, что оно измеримо и по Лебегу.

b) При этом $\mu(A) = S(A)$.

Подсказка: это совсем не сложно, используйте определения.