Задачи по метрическим пространствам

Примечание: Задачи с номерами, выделенными ***жирным наклонным*** шрифтом, обязательны для зачёта.

1. Докажите, что следующие множества являются нормированными векторными пространствами:

(a) Множество ℓ_p последовательностей действительных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots)$, для которых $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$, с нормой $||x||_p = (\sum_n |x_n|^p)^{1/p}$ (при $p \geq 1$).

(b) Множество ℓ_∞ ограниченных последовательностей с нормой $||x||_\infty = \sup_n |x_n|$.

(c) Множество c сходящихся последовательностей с нормой $||\cdot||_\infty$.

2. (*Пространство Бэра*) Докажите, что множество $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ последовательностей натуральных чисел с метрикой $\rho(x, y) = 1/2^n$, где n — номер первого различия $x_n \neq y_n$, является метрическим пространством.

3. В метрическом пространстве радиусы двух пересекающихся шаров (с разными центрами) относятся как $1 : 2$. Докажите, что если оба шара увеличить втрое, то один из них будет содержать другой.

4. Может ли в метрическом пространстве шар большего радиуса содержаться в шаре меньшего радиуса, но не совпадать с ним?

5. (a) Количество попарно непересекающихся замкнутых шаров радиуса 1 в метрике Хэмминга пространства $\{0,1\}^n$ не может превосходить $2^n/(n+1)$.

(b) Если в подмножестве $M \subset \{0,1\}^n$ любые два слова различаются хотя бы в 3-х буквах, то $|M| \leq 2^n/(n+1)$.

6. (a) Если X, Y — метрические пространства с метриками ρ_X, ρ_Y, то при $p \geq 1$ функция $\rho_p((x, y), (x', y')) = (\rho_X(x, x')^p + \rho_Y(y, y')^p)^{1/p}$ является метрикой на $X \times Y$.

(b) Изометричны ли друг другу пространства $X \times Y$ с метриками ρ_p при разных p? Гомеоморфны ли?

7. Изометричны ли друг другу канторов дисконтинуум $\mathfrak{C}$ и пространство Кантора $\{0,1\}^\mathbb{N}$? Гомеоморфны ли?

8. Какие из пространств $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \ell_p, \ell_\infty, c, \mathbb{N}^\mathbb{N}$ (a) полны (b) сепарабельны?

9. (a) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ нельзя представить в виде объединения счётного количества замкнутых в $\mathbb{R}$ множеств.

(b)* Существует ли функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, непрерывная в иррациональных точках и разрывная в рациональных? А наоборот?

10. (a) Постройте изометричное вложение произвольного метрического пространства X в $B(X)$. (*Указание*: рассмотрите функции $f_x(y) = \rho(x, y)$.)

    (b) Придумайте другое доказательство теоремы о пополнении.

11. Проверьте аксиомы поля $\mathbb{R}$ в модели Кантора.

12. Будет ли верна теорема Банаха о неподвижной точке, если отказаться (a) от полноты (b) от сжимаемости, заменив условием $\rho(\varphi(x), \varphi(y)) < \rho(x, y)$?

13. Пусть $l_1, \ldots, l_n$ — прямые на плоскости, среди которых есть непараллельные. Проектируем точку $x_1 \in l_1$ на l_2, затем полученную точку $x_2 \in l_2$ на l_3, и т.д., в конце проектируя точку $x_n \in l_n$ на l_1. Докажите, что существует ровно одна точка $x_1 \in l_1$, для которой цикл замкнётся.

14. Найдите приближённое решение уравнения:

    (a) $x^4 = x + 1$ с точностью до $0,001$;

    (b) $x + e^x = 0$ с точностью до $0,00001$.

15. Какие из следующих пространств компактны?

    (a) замкнутый шар в ℓ_2;

    (b) «параллелепипед» $\{x \mid x_n \leq 1/n,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ в ℓ_2;

    (c) пространство Бэра $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;

    (d) пространство Кантора $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

16. Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда в нём из любой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

17. Компактное метрическое пространство сепарабельно.

18.* Компакт без изолированных точек имеет мощность континуума.