

Группы; группы подстановок

Листок 3

Задачи на подстановки; группы движений многогранников.

ЗАДАЧА 1. Какие из следующих подмножеств группы подстановок S_n являются в ней подгруппами:

- а) множество всех четных перестановок (обозначение: A_n);
- б) множество всех нечетных перестановок;
- в) множество всех перестановок, оставляющих неподвижными элементы некоторого подмножества $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$;
- г) множество всех перестановок, при которых образы всех элементов некоторого подмножества $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ принадлежат этому подмножеству;
- д) множество $\{E, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ (обозначение: V_4);
- е) множество $\{E, (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}$ (обозначение: D_4)?

ЗАДАЧА 2. Каких подстановок больше в группе S_n — четного или нечетного порядка?

ЗАДАЧА 3 (ТЕОРЕМА КЭЛИ). Докажите, что любая конечная группа вкладывается в группу подстановок S_n для некоторого n , не превосходящего ее порядка.

ЗАДАЧА 4. Каков максимально возможный порядок подстановки из S_{13} ?

ЗАДАЧА 5. Какое максимальное число попарно коммутирующих подстановок можно построить в S_6 ?

ЗАДАЧА 6. Какие подстановки могут быть представлены в виде произведения двух циклов?

ЗАДАЧА 7. Пусть в разложении $\sigma \in S_n$ на непересекающиеся циклы число циклов длины i равно m_i . При каких значениях m_2, \dots, m_n найдется такая подстановка τ , что $\tau^2 = \sigma$?

ЗАДАЧА 8. Если в игре в “пятнашки” поменять местами фишки с номерами 14 и 15, то, следуя правилам, невозможно получить первоначальное расположение фишек.

ЗАДАЧА 9. Для любой фигуры (любого множества точек) в конечномерном аффинном пространстве \mathbb{R}^n множество всех ее движений (преобразований, сохраняющих расстояния между точками) образует группу относительно операции композиции.

ЗАДАЧА 10. Докажите, что группа движений квадрата изоморфна группе D_4 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Группа движений правильного n -угольника обозначается через D_n и называется *группой диэдра*.

ЗАДАЧА 11. Сколько элементов в группе D_n ? Каким минимальным количеством порождающих элементов обладает эта группа?

ЗАДАЧА 12. Нарисуйте плоские фигуры, для которых группа движений изоморфна
а) \mathbb{Z}_2 ; б) \mathbf{V}_4 ; в) \mathbb{Z}_3 ; г) \mathbb{Z}_n .

ЗАДАЧА 13. Найдите группы собственных движений
а) куба; б) октаэдра; в) * икосаэдра.