

## Остовные деревья

1. Алгоритм Прима для поиска минимального остовного дерева работает следующим образом. Дерево строится последовательно, изначально в него входит только первая вершина. Производится  $n - 1$  шаг (где  $n$  – количество вершин), на каждом шаге к дереву добавляется одна вершина и одно ребро. Из всех ребер, соединяющих вершины, уже добавленные в дерево, с остальными вершинами, выбирается ребро минимального веса. Это ребро вместе с его концевой вершиной добавляется к дереву. Докажите, что в результате выполнения алгоритма получается минимальное остовное дерево.
2. Остовное дерево графа называется узким, если самое тяжелое ребро в этом дереве имеет самый маленький возможный вес из самых тяжелых ребер всевозможных остовных деревьев графа. Докажите, что минимальное остовное дерево является узким.
3. Задача коммивояжера ставится следующим образом: дан граф с весами на ребрах. Найти путь наименьшего веса, проходящий через каждую вершину хотя бы по разу. Докажите, что выполнено соотношение  $M \leq K \leq 2M$ , где  $K$  – вес оптимального пути в задаче коммивояжера, а  $M$  – суммарный вес ребер в минимальном остовном дереве графа.