26 июня 2015 г.

Суммы квадратов-I. Гауссовы числа

Задача 1 (1 балл)**.** Пусть p — простое *целое* число вида $4k+3$. Докажите, что p простое *гауссово.*

Задача 2 (1 балл)**.** Разложите на простые гауссовы числа следующие числа: 2, $5+i$, $3+4i$.

Задача 3. *a*) (1 балл) Докажите, что число $2n$ представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда число n представимо в виде суммы двух квадратов.
b) (1 балл) Пусть целые числа m и n представимы в виде суммы двух квадратов. Докажите, что mn тоже представимо в виде суммы двух квадратов.

Задача 4 (2 балла)**.** Поделите с остатком $15+13i$ на $3+2i$. Сколькими способами это возможно?

Задача 5. Рассмотрим множество чисел вида $u = x + y\sqrt{-2} = x + y\sqrt{2}i$, где $x, y \in \mathbb{Z}$ и обозначим его за $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Будем говорить, что число w *делится* на число u, если найдется такое число v, что $w = u \cdot v$.
a) (1 балл) Изобразите на комплексной плоскости числа из $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ кратные $3+\sqrt{-2}$.
b) (2 балла)Сформулируйте и докажите: в $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ можно делить с остатком.
c) (2 балла) Сформулируйте и докажите, что в $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ верна основная теорема арифметики.

Задача 6 (3 балла)**.** Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ не выполнена основная теорема арифметики. Почему не работает доказательство из задачи **??**?

26 июня 2015 г.

Суммы квадратов-I. Гауссовы числа

Задача 1 (1 балл)**.** Пусть p — простое *целое* число вида $4k+3$. Докажите, что p простое *гауссово.*

Задача 2 (1 балл)**.** Разложите на простые гауссовы числа следующие числа: 2, $5+i$, $3+4i$.

Задача 3. *a*) (1 балл) Докажите, что число $2n$ представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда число n представимо в виде суммы двух квадратов.
b) (1 балл) Пусть целые числа m и n представимы в виде суммы двух квадратов. Докажите, что mn тоже представимо в виде суммы двух квадратов.

Задача 4 (2 балла)**.** Поделите с остатком $15+13i$ на $3+2i$. Сколькими способами это возможно?

Задача 5. Рассмотрим множество чисел вида $u = x + y\sqrt{-2} = x + y\sqrt{2}i$, где $x, y \in \mathbb{Z}$ и обозначим его за $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Будем говорить, что число w *делится* на число u, если найдется такое число v, что $w = u \cdot v$.
a) (1 балл) Изобразите на комплексной плоскости числа из $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ кратные $3+\sqrt{-2}$.
b) (2 балла)Сформулируйте и докажите: в $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ можно делить с остатком.
c) (2 балла) Сформулируйте и докажите, что в $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ верна основная теорема арифметики.

Задача 6 (3 балла)**.** Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ не выполнена основная теорема арифметики. Почему не работает доказательство из задачи **??**?