q-биномиальные коэффициенты

Задача 1. Положим $[n] = 1 + q + \dots + q^{n-1}$, $[n]! = [1] \cdot [2] \cdot \dots \cdot [n]$. Докажите, что

$$\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m+n]!}{[m]![n]!}.$$

Задача 2 (q-бином Ньютона). Докажите, что

$$(1+xq)(1+xq^2)\dots(1+xq^n) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{k(k+1)/2} x^k.$$

Указание. Рассмотрите левую часть как многочлен от x и проинтерпретируйте его коэффициенты (они будут многочленами от q) как производящие функции.

Задача 3 (другой q-бином Ньютона). Пусть переменные x и y не коммутируют, но вместо этого удовлетворяют соотношению $yx = qxy$. Докажите, что

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k}.$$

Задача 4*. Выведите из теоремы о q-биноме *конечную форму тождества Якоби для тройного произведения*

$$\prod_{k=1}^{m} (1+xq^k)(1+x^{-1}q^{k-1}) = \sum_{j=-m}^{m} \begin{bmatrix} 2m \\ m+j \end{bmatrix} q^{j(j+1)/2} x^j.$$

Получите отсюда результат задачи $\mathbf{1\frac{1}{2}.5}$.

esmirnov@hse.ru