

Разбиения и диаграммы Юнга

Задача 1 (Формула Бине). Разложив производящую функцию для чисел Фибоначчи в сумму вида

$$F(q) = \frac{1}{1 - q - q^2} = \frac{A}{1 - aq} + \frac{B}{1 - bq},$$

представьте последовательность Фибоначчи в виде суммы двух геометрических прогрессий.

Задача 2. а) Выпишите производящую функцию для количества разбиений числа n в сумму *различных* слагаемых.

б) Выпишите производящую функцию для количества разбиений числа n в сумму *нечетных* слагаемых (возможно, одинаковых).

в) Сравнив результат предыдущих пунктов, покажите, что количество способов разбить число n на различные слагаемые равно количеству способов разбить его на нечетные слагаемые.

г*) Постройте явную биекцию между этими разбиениями.

Разбиение называется *самосопряженным*, если соответствующая диаграмма Юнга симметрична относительно диагонали.

Задача 3. а) Постройте биекцию между множеством самосопряженных разбиений числа n и множеством его разбиений в сумму различных нечетных слагаемых.

б) Вычислите производящую функцию для числа самосопряженных разбиений.

Задача 4. Докажите, что производящая функция для количества диаграмм Юнга заданного полупериметра равна $\frac{q^2}{1-2q}$.

Задача 5*. Обозначим через σ_n сумму делителей числа n , включая 1 и n ; так, например, $\sigma_6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$. Пусть $\Sigma(q)$ — производящая функция для последовательности σ_n :

$$\Sigma(q) = q + 3q^2 + 4q^3 + 7q^4 + 6q^5 + 12q^6 + 8q^7 + \dots$$

а) Докажите, что

$$\Sigma(q)P(q) = qP'(q),$$

где $P(q)$ — производящая функция для числа разбиений.

б) Выведите отсюда рекуррентное соотношение на числа σ_n .

УКАЗАНИЕ. Рассмотрите *логарифмическую производную* ряда $P(q)$:

$$(\ln P(q))' = \frac{P'(q)}{P(q)}.$$