2. Вокруг формулы Эйлера

Задача 1 (формула Эйлера). а) Рассмотрим связный *планарный граф*, т.е. граф, нарисованный на плоскости так, что ребра не пересекаются нигде, кроме вершин. Пусть его число вершин, ребер и граней равно соответственно V, E и F. Докажите, что

$$V - E + F = 2.$$

б) Докажите то же соотношение для графа, нарисованного на сфере.

в) Докажите, что то же соотношение верно для числа вершин, ребер и граней выпуклого многогранника.

Задача 2. Докажите, что на сфере нельзя нарисовать графы K_5 (полный граф на пяти вершинах) и K_{33} («три домика и три колодца»).

Задача 3. а) Можно ли нарисовать графы K_5 и K_{33} на торе (т.е. на поверхности бублика) так, чтобы ребра не пересекались бы нигде, кроме вершин?

б) А на ленте Мебиуса?

Задача 4. а) Придумайте аналог формулы Эйлера для графов, вложенных в тор.

Указание. Вспомните лекцию.

б) Рассмотрим граф из V вершин, расположенных вдоль параллели тора, и такого же числа ребер, соединяющих эти вершины по кругу (см. рис.). Придуманная вами в предыдущем пункте формула для него, скорее всего, не будет работать. В чем тут дело?

$* * *$

Напомним, что *телесным углом* многогранного конуса называется площадь поверхности фигуры, которую этот угол высекает на единичной сфере с центром в вершине конуса. Полный телесный угол составляет 4π.

Задача 5*. Для данного выпуклого многогранника P обозначим через $S(P)$ сумму телесных углов в его вершинах, а через $D(P)$ — сумму его двугранных углов.

а) Пусть P — тетраэдр. Докажите, что $S(P) - 2D(P) + 4\pi = 0$.

Указание. Параллельно перенесите все грани тетраэдра в начало координат и рассмотрите разбиение единичной сферы полупространствами, содержащими грани. Далее используйте формулу включений и исключений.

б) В общем случае докажите, что $S(P) - 2D(P) + 2\pi F - 4\pi = 0$, где F — число граней многогранника (теорема Грэма).

Указание. Многогранник можно разбить на тетраэдры.