

Введение в теорию групп

Лекция 3

Группы подстановок.

ЗАДАЧА 1. Найдите произведение подстановок:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$

ЗАДАЧА 2. Найдите обратную подстановку:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Циклом* $(i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k)$ называется подстановка, в которой i_1 отображается в i_2 , i_2 — в i_3 , ..., i_{k-1} — в i_k , i_k — в i_1 , а остальные элементы отображаются сами в себя.

Два цикла $(i_1, i_2 \dots i_{p-1} i_p)$ и $(j_1 j_2 \dots j_{q-1} j_q)$ называются *независимыми*, если множества $\{i_1, \dots, i_p\}$ и $\{j_1, \dots, j_q\}$ не пересекаются.

ЗАДАЧА 3. Любая подстановка единственным образом раскладывается в произведение независимых циклов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Инверсией* для подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_{n-1} & i_n \end{pmatrix}$$

называется пара $k, l \in \{1, \dots, n\}$, для которой $k < l$ и $i_k > i_l$.

ЗАДАЧА 4. Найдите все инверсии в подстановке

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Четностью* подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_n$ называется четность числа инверсий в ней.

ЗАДАЧА 5. Определите четность предыдущей подстановки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Подстановка, которая меняет только два элемента, а все остальные оставляет на месте, называется *транспозицией*. Если транспозиция меняет местами элементы i и j , то она обозначается просто через (i, j) .

ЗАДАЧА 6. Умножение подстановки (справа или слева) на произвольную транспозицию меняет ее четность на противоположную.

ЗАДАЧА 7. Докажите, что каждая подстановка может быть разложена в произведение транспозиций.

ЗАДАЧА 8. Докажите, что при умножении подстановок их четности складываются по модулю два.

ЗАДАЧА 9. На доске размером 15×15 клеток расставили 15 ладей, не бьющих друг друга. Затем каждую ладью передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи будут бить друг друга.