

Введение в теорию групп

Листок 1

Группы: основные свойства и примеры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 НАПОМИНАНИЕ. Множество G с операцией $*$ называется *группой*, если выполняются следующие свойства:

- 1) $\forall x, y, z \in G (x * y) * z = x * (y * z)$ (ассоциативность);
- 2) $\exists e \in G \forall x \in G e * x = x * e = x$ (элемент e называется *единицей* группы G);
- 3) $\forall x \in G \exists y \in G x * y = y * x = e$ (элемент y называется *обратным* для x и обозначается через x^{-1}).

Знак $*$ часто опускается, результат применения операции $*$ к элементам x и y записывается через xy .

ЗАДАЧА 1. Какие из указанных числовых множеств с операциями являются группами?

- а) $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$.
- б) (\mathbb{N}, \cdot) , (\mathbb{Z}, \cdot) , (\mathbb{Q}, \cdot) , (\mathbb{R}, \cdot) .
- в) $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

ЗАДАЧА 2. Какие из указанных множеств с операцией композиции являются группами:

- а) множество движений (наложений) треугольника;
- б) множество параллельных переносов (сдвигов) плоскости;
- в) множество зеркальных симметрий (отражений) плоскости?

ЗАДАЧА 3. Нарисуйте таблицы сложения и умножения для остатков по модулю 5 и 6.

а) Какие из полученных множеств с операциями являются группами? Если нет, то какие элементы нужно убрать, чтобы полученное множество стало группой?

б) Найдите -2 и -4 среди остатков по модулю 5 и среди остатков по модулю 6.

в) Найдите $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ среди ненулевых остатков по модулю 5.

ЗАДАЧА 4. Сколько элементов в группе \mathbf{S}_n ?

ЗАДАЧА 5. Найдите все различные (не изоморфные между собой) группы и придумайте их геометрическую реализацию

- а) из двух элементов;
- б) из трех элементов.

ЗАДАЧА 6. Докажите, что определение группы равносильно следующему: группа это множество с такой ассоциативной операцией, что любое уравнение вида $ax = b$ или $ya = b$ имеет однозначное решение.