Школа 57
летний лагерь
Kesterciems

июнь-июль 2017

Основная теорема арифметики – 1

Задача 1. Разложите на простые множители в гауссовых числах:
a°) $7+i$, b°) 2017, c) $57+179i$.

Задача 2. Пользуясь алгоритмом Евклида, найдите НОД следующих гауссовых чисел:
a°) $7-i$ и $-4+7i$, b) $5+3i$ и $6-4i$.

Выясним, какие простые целые числа остаются простыми и в гауссовых числах.
Ответ: простыми в гауссовых остаются натуральные простые числа вида $4k+3$ (и противоположные им).

Задача 3. Пусть p — простое целое число, $p \geqslant 3$. Покажите, что:

a) Если p представимо в виде суммы квадратов, то p не просто в гауссовых.

b) Если p не просто в гауссовых, то p представимо в виде суммы квадратов.

c) Если p представимо в виде суммы квадратов, то p имеет вид $4k+1$.

d) Если p имеет вид $4k+1$, то -1 является квадратом по модулю p.

Подсказка: рассмотрите произведение $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(p-2)\cdot(p-1)$ и сгруппируйте сомножители по парам двумя способами: сначала a с $-a$, а потом a с a^{-1}.

e) Если p имеет вид $4k+1$, то p не просто в гауссовых.

Выясним теперь, как представляются целые числа в виде суммы двух квадратов целых чисел. Иными, словами, как разложить целое число n в произведение $z\cdot\bar{z}$, где z — гауссово число.

Задача 4. Пусть целые числа m и n представляются в виде суммы двух квадратов. Покажите, что и mn представлется в виде суммы двух квадратов.

Разложим число n на простые множители в целых числах:

$$n = 2^c p_1^{d_1}\ldots p_k^{d_k} q_1^{e_1}\ldots q_l^{e_l},$$

где p_i — натуральные простые числа вида $4k+1$, а q_i — натуральные простые числа вида $4k+3$.

Задача 5. Покажите, что n представляется в виде суммы двух квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда все степени $e_1,\ldots,e_l$ четны.

Задача 6. Покажите, что число способов представить n в виде суммы двух квадратов целых чисел равно $4(d_1+1)\ldots(d_k+1)$.