Основная теорема арифметики – 2

Лемма 1 (Гаусс). Пусть R — кольцо с однозначным разложением на простые множители, а P, Q — многочлены от x с коэффициентами в R. Тогда НОД коэффициентов PQ есть произведение НОД коэффициентов P и НОД коэффициентов Q.

Лемма 2. Пусть R — кольцо с однозначным разложением на простые множители, а F — его поле частных. Если многочлен $P \in R[x]$ неприводим в $R[x]$, то он неприводим в $F[x]$ или константа. Если $P \in R[x]$ неприводим в $F[x]$, то $P = c \cdot Q$, где $c \in R$ и многочлен $Q \in R[x]$ неприводим в $R[x]$.

Теорема. Пусть R — кольцо с однозначным разложением на простые множители. Тогда кольцо многочленов $R[x]$ — также кольцо с однозначным разложением на простые множители.

Набросок доказательства. Существование разложение на простые в $R[x]$ очевидно. Пусть F — поле частных кольца R. В кольце $F[x]$ разложение на простые однозначно. Разберём сначала случай, когда НОД коэффициентов многочлена равен 1. Пусть есть два разложения на неприводимые многочлены в $R[x]$: $P_1 \cdot \ldots \cdot P_k = Q_1 \cdot \ldots \cdot Q_l$. Согласно лемме 2, это будут разложения на простые и в $F[x]$, значит они совпадают с точностью до умножения на константы из F. А раз P_i и Q_i простые в $R[x]$, то эти константы должны быть обратимы в R. Общий случай свобится к разобранному частному.

Задача 1°. a) Пусть m, n — натуральные числа. Разделите с остатком многочлен $x^n - 1$ на $x^m - 1$. Найдите НОД этих двух многочленов.

b) Найдите НОД чисел $2^n - 1$ и $2^m - 1$.

Задача 2°. Пусть a, m, n — натуральные числа, $a \geqslant 2$. Найдите НОД многочленов $x^{a^n} - x$ и $x^{a^m} - x$.

Задача 3. Разделите многочлен $(x-1)^{2017}$ с остатком на следующие многочлены:

a) $x + 2$, b°) $(2x+1)^2$, c°) $x^2 - 4$, d) $x(x+1)(x+2)$, e) $(x+1)^{2016}$.

Задача 4°. Разделите $x + 2y + x^2 y$ на $x + y$ с остатком в $\mathbb{R}(y)[x]$, в $\mathbb{R}(x)[y]$, в $\mathbb{R}(x, y)$.

Задача 5. Разделите $x^2 + y^2 - 3x + y$ на $xy - 2$ с остатком в $\mathbb{R}(y)[x]$, в $\mathbb{R}(x)[y]$, в $\mathbb{R}(x, y)$.

Задача 6. a°) Докажите, что многочлен $x^2 + y^2 - 1$ неприводим в $\mathbb{R}[x, y]$. Определите, когда многочлен

$$x^2 + axy + y^2 + bx + cy + d$$

неприводим b) в $\mathbb{C}[x, y]$, в c) $\mathbb{R}[x, y]$. Ответ должен быть условием на константы a, b, c, d.