Неравенства-II.

Задача 1. Известно, что $x + 2y + 3z = 14$. Найдите минимально возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

Задача 2. Докажите, что для положительных чисел a, b, c

$$\sqrt{3(a+b+c)} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Задача 3. Для точки P внутри треугольника ABC обозначим за h_a, h_b, h_c расстояния до его сторон. При каком положении точки P величина $h_a h_b h_c$ максимальна?

Задача 4. В вершинах куба расставлены неотрицательные числа с общей суммой 1. На каждом ребре написано произведение чисел, стоящих на его концах. Найти наибольшее значение суммы произведений на всех рёбрах

Задача 5. Даны числа $a, b > 0$. Докажите, что

$$2a^3 + b^3 \geqslant 3a^2 b$$

Задача 6. На доске 10×10 выписаны подряд числа от 1 до 100 (1–10 в первом ряду, 11-20 во втором и т.д.). За один ход разрешается выбрать любую клетку таблицы y и ее соседей x_1, x_2 — либо две соседние клетки по горизонтали, либо две по вертикали, либо две по диагонали. После этого разрешается уменьшить y на 2, а x_1 и x_2 увеличить на 1, или, наоборот, увеличить y на 2, а x_1 и x_2 уменьшить на 1. Докажите, что, если после нескольких таких операций на доске вновь оказались числа $1, \ldots, 100$, то они расположены на тех же местах, что и раньше.

Для сдачи листка необходимо решить 4 задачи.