

## Упражнения к первой лекции

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что скалярное произведение двух векторов

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- а) на плоскости;
- б) в трехмерном пространстве

не зависит от выбора координат и равняется произведению длин векторов на косинус угла между ними.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Пусть дано  $n + 1$  различных действительных чисел  $x_0, x_1, \dots, x_n$  и  $n + 1$  (не обязательно различных) действительных чисел  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . Докажите, что существует и единственен многочлен степени  $\leq n$ , который в каждой точке  $x_i, i = 0, \dots, n$ , принимает значение  $y_i$ . Найдите этот многочлен явно.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Пусть данные  $X$  имеют два признака  $x_1$  и  $x_2$  и два цвета — красный и зеленый. Нам стало известно, что красные и зеленые точки распределены так:

- а) красные точки находятся слева от прямой  $x = -2$  и справа от прямой  $x = 3$ , а зеленые — между этими прямыми;
- б) красные точки находятся либо левее прямой  $y = x$  и правее прямой  $y = -x$ , либо правее прямой  $y = x$  и левее прямой  $y = -x$ , а зеленые — либо левее и прямой  $y = x$ , и  $y = -x$ , либо правее и  $y = x$  и  $y = -x$ .

Введите дополнительные признаки в данных, скомбинированные из признаков  $x_1, x_2$ , и разделите данные линейно в пространстве большей размерности.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Объясните, стоит ли использовать оценку leave-one-out или k-fold с небольшим  $k$  в случае, когда:

- а) обучающая выборка содержит очень малое количество объектов;
- б) обучающая выборка содержит очень большое количество объектов.

## Упражнения ко второй лекции по машинному обучению

УПРАЖНЕНИЕ 5. Метрика Минковского определяется как

$$\rho_p(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

для  $p \geq 1$ . Частными случаями данной метрики являются:

- Евклидова метрика ( $p = 2$ )
- Манхэттенское расстояние ( $p = 1$ )
- Метрика Чебышева ( $p = \infty$ )

Изобразите линии уровня функции  $f(x) = \rho_p(x, 0)$  для трех приведенных случаев в двумерном пространстве ( $n = 2$ ).

УПРАЖНЕНИЕ 6. Рассмотрим набор из 14 точек в двумерном пространстве:  $(1, 1)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 3)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(7, 7)$ ,  $(-1, 10)$ ,  $(4, -4)$  — красные,  $(-1, -1)$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(-3, 1)$ ,  $(-4, 2)$ ,  $(10, 10)$ ,  $(10, 7)$ ,  $(9, 8)$  — синие.

Нарисуйте их на плоскости и заштрихуйте границы красных и синих областей при классификации одним и двумя ближайшими соседями.

УПРАЖНЕНИЕ 7. Возьмем точки из предыдущего упражнения.

Найдите 8 закономерностей разных типов (пороговые условия, конъюнкции пороговых условий, синдромы, полуплоскости, шары) и выберите из них самые информативные по Парето.

УПРАЖНЕНИЕ 8. Для точек из предыдущих двух упражнений постройте решающее дерево с помощью жадного алгоритма.

УПРАЖНЕНИЕ 9. Пусть  $X = \mathbb{R}^2$ ,  $K(x, y) = \langle u, v \rangle^4$ , где  $u = (u_1, u_2)$ ,  $v = (v_1, v_2)$ . Найдите пространство  $\mathcal{H}$  и преобразование  $\psi : X \rightarrow \mathcal{H}$  такое, что

$$K(x, x') = \langle \psi(x), \psi(x') \rangle_{\mathcal{H}}.$$

## Упражнения к лекции 3 по машинному обучению

УПРАЖНЕНИЕ 10. Реализуйте следующую булеву функцию трех переменных с помощью двухслойной нейронной сети:

$$f(x) = (\bar{x}_1 \vee x_3) \& (x_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

Все нейроны должны использовать функцию активации  $\sigma(x) = [x > 0]$ .

УПРАЖНЕНИЕ 11. Докажите, что с помощью двухслойной нейронной сети с пороговой функцией активации можно представить любую булеву функцию от  $n$  переменных (то есть любую функцию из  $\{0, 1\}^n$  в  $\{0, 1\}$ ).

УПРАЖНЕНИЕ 12. Пусть имеется нейрон от двух булевых переменных, который мы обучаем функциям

- а)  $x \wedge y$ ;
- б)  $x \vee y$ .

Предположим, что изначально все значения связей в нейроне — нули (включая связь с константой). Предположим также, что данные предъявляются в таком порядке:

$(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1); (0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1); (0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1);$  и т.д.

Пусть обучение ведется методом градиентного спуска (как в персептроне Розенблатта) с темпом обучения  $h$ . Найдите, через сколько шагов (в зависимости от темпа обучения) нейрон полностью обучится.