АКСИОМЫ ЕВКЛИДА–ГИЛЬБЕРТА И ЗАДАЧИ

Валентина Кириченко

В системе Гильберта аксиом евклидовой плоскости, основные и неопределяемые объекты — это точки, прямые и плоскости. Между объектами есть отношения, смысл которых раскрывается в аксиомах. Примеры отношений: лежать, между, конгруэнтный, параллельный. Аксиомы разбиты на пять групп.

Аксиомы принадлежности.

I_1 Для любых двух точек существует прямая, принадлежащая каждой из этих двух точек.

I_2 Для любых двух точек существует не более одной прямой, принадлежащей каждой из этих двух точек.

I_3 На любой прямой существует по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

Аксиомы порядка.

II_1 Если точка B прямой лежит между точками A и C той же прямой, то A, B и C — различные точки прямой, причем B лежит также и между C и A.

II_2 Для любых двух точек A и C на определяемой ими прямой существует по крайней мере одна точка B такая, что C лежит между A и B.

II_3 Среди любых трёх точек прямой, существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

II_4 Пусть A, B, C — три не лежащие на одной прямой точки и a прямая, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая a проходит через точку отрезка AB, то она непременно проходит через точку отрезка AC или точку отрезка BC.

Отношение конгруэнтности (или равенства) будет обозначаться символом $\equiv$. Согласно Гильберту, ***углом*** мы называем фигуру, состоящую из двух лучей с общим началом.

Аксиомы конгруэнтности.

III_1 На данной прямой от данной точки по данную сторону от неё можно отложить отрезок, конгруэнтный данному.

III_2 Два отрезка, конгруэнтные третьему, конгруэнтны друг другу.

III_3 Пусть AB и BC — два отрезка прямой, не имеющие общих точек, а $A'B'$ и $B'C'$ — два отрезка второй (или той же самой) прямой, также не имеющие общих точек. Если $AB \equiv A'B'$ и $BC = B'C'$, то отрезок AC конгруэнтен отрезку $A'C'$

III_4 От данного луча в данную полуплоскость можно отложить единственный угол равный данному.

III_5 Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

то имеет место также конгруэнтность $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

Миникурс “Аксиомы Гильберта и неевклидова геометрия”, летняя школа в Kesterciems, 2017 г.

Аксиома о параллельных.

IV_1 Через данную точку, не лежащую на данной прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Аксиомы непрерывности.

V_1 Для любых двух отрезков AB и CD на прямой AB существует конечное число точек $A_1,\ldots, A_n$, таких что отрезки AA_1, $A_1A_2,\ldots$, $A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD, и при этом точка B лежит между точками A и A_n.

V_2 Точки прямой нельзя дополнить новыми точками, так чтобы продолжали выполняться аксиомы I_{1-2}, II, III_1, V_1.

Если специально не оговорено иное, то через $\mathbb{F}$ обозначается произвольное поле. Допускается решать задачи в предположении, что $\mathbb{F}$ совпадает с полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. Когда речь идёт о конечных полях, допускается рассматривать только случай поля $\mathbb{F}=\mathbb{F}_2$ из двух элементов.

Задача 1. Выведите из аксиом I_{1-3}, что любые две прямые на плоскости либо не пересекаются, либо пересекаются в единственной точке.

Задача 2. Проверьте, что координатная аффинная плоскость $\mathbb{F}^2$ над полем $\mathbb{F}$ удовлетворяет аксиомам I_{1-3}.

Задача 3. Дайте алгебраическое определение проективной плоскости $\mathbb{FP}^2$ над полем $\mathbb{F}$. Проверьте, что $\mathbb{FP}^2$ удовлетворяет аксиомам I_{1-3}. Останется ли предыдущее утверждение верным, если поменять ролями точки и прямые, то есть, точки называть прямыми, а прямые — точками?

Задача 4. Найдите число точек и прямых на аффинной и проективных плоскостях над конечным полем $\mathbb{F}$ из q элементов, если q равно

(а) 2; (б) 3; (в) 4; (г) 5; (д) 7; (е) $q=p^n$, где p — простое число

Задача 5. Выведите из аксиом I_{1-3} и II_{1-4}, что из трёх точек на прямой ровно одна лежит между двумя другими.

Задача 6 (Лишняя аксиома)**.** Выведите из аксиом I_{1-3} и II_{1-4}, что любые четыре точки на прямой можно обозначить буквами A, B, C, D так, чтобы точка, обозначенная буквой B, лежала как между точками A и C, так и между A и D, а точка, обозначенная буквой C, лежала как между точками B и D, так и между A и D.

Задача 7. (а) Пусть $\mathbb{F}\subset\mathbb{R}$ — подполе вещественных чисел. Определите на точках координатной аффинной плоскости $\mathbb{F}^2$ отношение “лежать между” так, чтобы выполнялись аксиомы порядка II_{1-4}.

(б) Пусть $\mathbb{F}$ — конечное поле. Можно ли определить на точках координатной аффинной плоскости $\mathbb{F}^2$ отношение “лежать между” так, чтобы выполнялись аксиомы порядка II_{1-4}?

Задача 8. Определим длину отрезка с концами (x,y), (x',y') в $\mathbb{F}^2$ формулой $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$. Скажем, что два отрезка конгруэнтны, если их длины равны.

(а) Выполняются ли аксиомы конгруэнтности III_{1-3} в $\mathbb{Q}^2$ (через $\mathbb{Q}$ обозначается поле рациональных чисел)?

(б) Найдите минимальное (по включению) подполе $\mathbb{F}\subset\mathbb{R}$, для которого выполняются аксиомы конгруэнтности. Это поле называется *полем Гильберта.*

(в*) Докажите, что поле Гильберта не содержит число $\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Факультет математики, НИУ ВШЭ
E-mail address: vkiritch@hse.ru