Неравенства
Листок 1

Комментарий к листочку: задачи НЕ упорядочены по сложности, чтобы было интереснее решать. Некоторые задачи будут с IMO – международной олимпиады по математике, однако не стоит думать, что это нерешаемые задачи или же что они намного сложнее остальных.

Чтобы закрыть этот листочек, нужно сдать хотя бы 7 задач. Чтобы закрыть курс, нужно закрыть все листочки.

Задача 1. *Найдите такую точку P внутри треугольника, что произведение $PH_a \cdot PH_b \cdot PH_c$ максимально. H_a, H_b, H_c – проекции точки P на соответствующие стороны.*

Задача 2. ***IMO - 1983.*** *Пусть a, b, c – стороны треугольника. Докажите, что*

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geqslant 0$$

Задача 3. *Пусть F_i – последовательность Фибоначчи($F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.) Докажите, что*

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \ldots + \frac{F_n}{2^n} < 2$$

Задача 4. ***AUO - 1975.*** *Пусть a, b, c – положительные вещественные числа. Докажите, что*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geqslant ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$$

Задача 5. *Выведите все неравенства о средних для n переменных самостоятельно, то есть не используя слова "было доказано на лекции".*

Задача 6. *Докажите КБШ, используя геометрический смысл скалярного умножения $(\overline{a} \cdot \overline{b}) = |a||b|\cos(\alpha)$, где α – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. То есть нужно доказать равносильность алгебраического и геометрического определений.*

Указание: Пусть в n-мерном пространстве задан обычный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где a_i – координаты вектора. Тогда $(e_i \cdot a) = a_i$ по обоим определениям. А ещё из геометрического определения можно вывести дистрибутивность скалярного умножения.

Задача 7. $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leqslant ab + bc + ac \leqslant 1$

Задача 8. ***IMO - 1995.*** *Пусть a, b, c – положительные вещественные числа такие, что $abc = 1$. Докажите, что*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$$

Задача 9. ***Неравенство треугольника в n-мерном случае.*** *$a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – наборы вещественных чисел. Покажите, что*

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2 + \ldots + (a_n+b_n)^2}$$

Задача 10. ***MMO - 1996.*** *Положительные числа a, b, c таковы, что $a^2 - ab + b^2 = c^2$. Докажите, что*

$$(a-c)(b-c) \leqslant 0$$