Неравенства
Листок 2

Для сдачи листочка достаточно сдать любые 4 задачи, но попытайтесь решить больше. Научиться решать неравенства можно только через собственный опыт.

Упражнения на метод Штурма.

Задача 1. *Пусть $x, y, z \geqslant 0$ и $x + y + z = 1$. Докажите, что*

$$0 \leqslant xy + yz + zx - 2xyz \leqslant 7/27.$$

Задача 2. *Пусть сумма положительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 1. Докажите, что*

$$\frac{(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)}{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)} \geqslant (\frac{n+1}{n-1})^n.$$

Задача 3. *Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшей будет площадь правильного n-угольника.*

Задача 4. *Докажите, что из всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольшим периметром будет обладать правильный n-угольник.*

Неравенства с олимпиад.

Задача 5. ***ВОШ - 2016.*** *Сумма положительных чисел a, b, c, d равна 3. Докажите неравенство*

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leqslant \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}.$$

Указание: Неравенство о средних для чисел $a, b, (c + d)$ может помочь.

Задача 6. ***ВОШ - 2013.*** *Положительные a, b, c, d удовлетворяют условию $2(a + b + c + d) \geqslant abcd$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant abcd$.*

Задача 7. ***IMO - 2012.*** *Дано целое положительное число $n \geqslant 3$ и действительные положительные числа $a_2, a_3, \dots, a_n$ такие, что $a_2 \dots a_n = 1$. Докажите, что*

$$(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > n^n.$$

Указание: Неравенство о средних для $\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1}, \dots, \frac{1}{k-1}, a_k$ – там $k-1$ штука чисел $\frac{1}{k-1}$. Эту идею довольно часто используется для оценки $(1 + x)^k$, особенно если неравенство Бернулли не помогает.

Задача 8. ***Shortlist IMO - 2009.*** *Пусть a, b, c – положительные вещественные числа такие, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$. Докажите, что*

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(a+2b+c)^2} + \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leqslant \frac{3}{16}.$$

Указание: Кто умеет использовать неравенство Йенсена, может потренировать это умение тут, если сделает неравенство однородным, нормализует, а потом применит Йенсена для функции $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$.

Остальные воспользуйтесь фактами: 1.) $2x + y + z \geqslant 2\sqrt{(x+y)(x+z)}$. 2.) $9(a + b)(b + c)(a + c) \geqslant 8(a + b + c)(ab + bc + ac)$. 3.) Условие равносильно $ab + bc + ca = abc(a + b + c)$. 4.) При данном условии $(ab + bc + ca)^2 \geqslant 3abc(a + b + c)$.