Введение в теорию полей

Листок 3

Классификация конечных полей. Конечные аффинные плоскости.

Задача 1. Докажите, что если поле $\mathbb{F}$ состоит из q элементов, то каждый элемент поля $\mathbb{F}$ является корнем многочлена $x^q - x$.

Задача 2. Докажите, что для любого простого p и натурального n существует поле из p^n элементов и все такие поля изоморфны (обозначение: $\mathbb{F}_{p^n}$). Докажите, что поле из p^n элементов всегда является полем разложения многочлена $x^{p^n} - x$ над полем $\mathbb{Z}_p$.

Задача 3. Для каких m и n поле $\mathbb{F}_{p^n}$ содержит $\mathbb{F}_{p^m}$ в качестве подполя?

Определение 1. *Конечной аффинной плоскостью* называется множество, состоящее из *точек*, с выделенными подмножествами этих точек, называемыми *прямыми*, удовлетворяющее следующим аксиомам:

А1. *Через любые две точки плоскости проходит единственная прямая.* (Иначе говоря, для любых двух точек A, B существует ровно одна прямая a, содержащая обе эти точки.)

А2. *Через всякую точку, не лежащую на данной прямой, проходит ровно одна прямая, параллельная данной.* (Иначе говоря, для любой прямой a и точки A, не содержащейся в a, существует единственная прямая b, содержащая A и не имеющая с a ни одной общей точки.)

А3. *Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.*

Задача 4. Существует ли аффинная плоскость из трех точек? Постройте аффинную плоскость из четырех точек. Единственна ли она?

Задача 5. Докажите, что существуют три прямые, попарно пересекающиеся в трех разных точках.

Задача 6. Докажите, что если прямая a параллельна прямой b, а прямая b — прямой c, то прямые a и c параллельны.

Задача 7. На каждой прямой любой аффинной конечной плоскости лежит не менее двух точек.

Задача 8. В любой точке конечной аффинной плоскости пересекаются не менее трех прямых.

Задача 9. Любые две прямые конечной аффинной плоскости содержат одинаковое количество точек.

Определение 2. *Порядком* конечной аффинной плоскости называется число точек каждой ее прямой.

Задача 10. Через любую точку плоскости проходит одинаковое число прямых. Для поскости порядка n это число равно $n + 1$.

Задача 11. Каждая прямая конечной аффинной плоскости принадлежит семейству их n попарно параллельных прямых.

Задача 12. Любая конечная аффинная плоскость порядка n содержит n^2 точек и n^2+n прямых.

Определение 3. Пусть $\mathbb{F}$ — поле. *Стандартной двумерной аффинной плоскостью* $\mathbf{A}$ над этим полем называется множество точек вида (x, y), $x, y \in \mathbb{F}$, для которых каждая прямая определяется некоторой точкой (x_0, y_0) и вектором $v_0 = (a_0, b_0)$ двумерного линейного пространства над $\mathbb{F}$: на этой прямой лежат точки вида $(x_0 + \lambda a_0, y_0 + \lambda b_0)$, $\lambda \in \mathbb{F}$, и только они.

Задача 13. Докажите, что стандартная двумерная аффинная плоскость над конечным полем порядка q является конечной аффинной плоскостью порядка q.

Задача 14. Из 16 космонавтов нужно выбрать 4 — экипаж космического корабля. Тренировки проводятся одновременно с 4 экипажами по 4 человека в каждом. Можно ли составить расписание тренировок так, чтобы каждая пара космонавтов побывала вместе в одном экипаже ровно один раз?

Задача 15 (головоломка Эйлера). Среди 36 офицеров поровну уланов, драгунов, гусаров, кирасиров, кавалергардов и гренадеров, и, кроме того, поровну генералов, полковников, майоров, капитанов, поручиков и подпоручиков, причем полк каждого из родов войск представлен офицерами всех шести рангов. Можно ли выстроить этих офицеров в каре 6×6 так, чтобы в любой колонне и любой шеренге встречались офицеры всех полков и всех рангов?

Замечание 1. *Такого каре не существует, было доказано в* 1900 *году перебором всем возможных построений каре.*

Задача 16. Решите задачу Эйлера для 25 офицеров; для $(p^n)^2$ офицеров; для 196 офицеров.

Задача 17 (очень сложная). Если число n при делении на 4 дает в остатке 1 или 2 и если в разложении этого числа на простые множители встречается в нечетной степени хотя бы одно простое число p вида $p = 4k+3$, то конечной аффинной плоскости порядка n не существует.

Задача 18 (очень сложная). Существует конечная аффинная плоскость порядка 9, не являющаяся двумерной стандартной аффинной плоскостью.

Задача 19 (не решена). Существует ли конечная аффинная плоскость порядка 10?