

ДЕЙСТВИЯ ГРУПП: СПИСОК ЗАДАЧ

1. Какие из операций являются действиями групп?
 - (a) группа \mathbb{R} с операцией «+» действует на \mathbb{R} по правилу: $t \circ x = x + t$;
 - (b) группа \mathbb{R} с операцией «+» действует на \mathbb{R} по правилу: $t \circ x = x \cdot t$;
 - (c) группа $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ с операцией « \cdot » действует на \mathbb{R} по правилу: $t \circ x = x/t$.
2. Рассмотрим многогранник P , изображённый на рисунке (усечённый вытянутый октаэдр).
 - (a) Какой группе изоморфна группа $\text{Isom}_+(P)$ собственных движений многогранника P ?
 - (b) Опишите орбиты группы $\text{Isom}_+(P)$ на множествах вершин, рёбер и граней P .
 - (c) Найдите стабилизаторы всех вершин, рёбер и граней.
3. Что такое орбиты подгруппы $H \subset G$, действующей на G умножениями
 - (a) слева
 - (b) справа?
4. Докажите, что множество неподвижных точек для действия группы G на себе самой сопряжениями — подгруппа в G . Эта подгруппа называется *центром* группы G и обозначается $Z(G)$.
5. Докажите, что стабилизаторы разных точек из одной орбиты сопряжены друг другу. (Две подгруппы $H_1, H_2 \subset G$ сопряжены, если существует такой элемент $g \in G$, что $H_1 = g \cdot H_2 \cdot g^{-1}$.)
6. Группа S_{10} действует на множестве слов длины 10 перестановками букв. Найдите число слов в орбите и число перестановок в стабилизаторе слова МАТЕМАТИКА.
7. Сколько существует неизоморфных конечных групп с ровно
 - (a) одним
 - (b) двумя
 - (c) тремя классами сопряжённости?
- 8.* Найдите все группы порядка p^2 . (p — произвольное простое число.)
9. Сколько элементов в центре неабелевой группы порядка p^3 .
- 10.* Найдите все группы порядка 8.
11. Сколько существует различных игральных костей? (*Игральная кость* — это кубик с написанным на каждой грани числом от 1 до 6. Числа могут повторяться от грани к грани.)
12. Докажите, что в A_6 существует подгруппа, изоморфная A_5 , но не имеющая неподвижных точек во множестве $\{1, \dots, 6\}$. (УКАЗАНИЕ: рассмотрите группу собственных движений икосаэдра, действующую на множестве его диагоналей.)