

ЗАДАЧИ ПО КУРСУ «ЭЛЕМЕНТЫ ТОПОЛОГИИ»

Примечание: Задачи с номерами, выделенными **жирным наклонным** шрифтом, обязательны для зачёта.

1. Объединение любого количества и пересечение конечного количества открытых множеств открыты.
2. Всякое открытое множество на прямой является объединением конечной или счётной совокупности попарно не пересекающихся интервалов (возможно, бесконечных).
3. Множество F замкнуто тогда и только тогда, когда для любой сходящейся последовательности точек $x_n \in F$ её предел $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ тоже лежит в F .
4. Верна ли лемма Гейне–Бореля для покрытия отрезка отрезками или полуинтервалами?
5. Прямоугольник и параллелепипед компактны.
6. Связные множества на прямой — это отрезки, интервалы и полуинтервалы (в том числе бесконечные) и только они.
7. Отображение $f : X \rightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любой сходящейся последовательности точек $x_n \rightarrow x$ в X верно $f(x_n) \rightarrow f(x)$.
8. Стереографическая проекция сферы без северного полюса на плоскость (см. рис.) — непрерывное отображение. Можно ли его продолжить до непрерывного отображения всей сферы на плоскость?
9. Функция $f(x) = \{x\}$ (дробная часть) разрывна на \mathbb{R} . Укажите максимальные подмножества прямой, на которых она непрерывна.
10. Из пункта А в пункт Б ведут две дороги. Известно, что две машины, соединённые баннером длиной 20 метров, могут проехать из А в Б по разным дорогам. Смогут ли разъехаться две машины с надувными шарами радиусом 11 метров в кузовах, едущие из А и из Б по разным дорогам навстречу друг другу?
11. Плоский блин можно разрезать:
 - (a) двумя перпендикулярными разрезами (см. рис.) на 4 равновеликие части;
 - (b) «розочкой» (см. рис.) на 3 равновеликие части.

